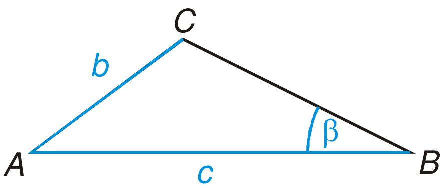
1.5.18 Úhly a zase úhly

Předpoklady: 010517

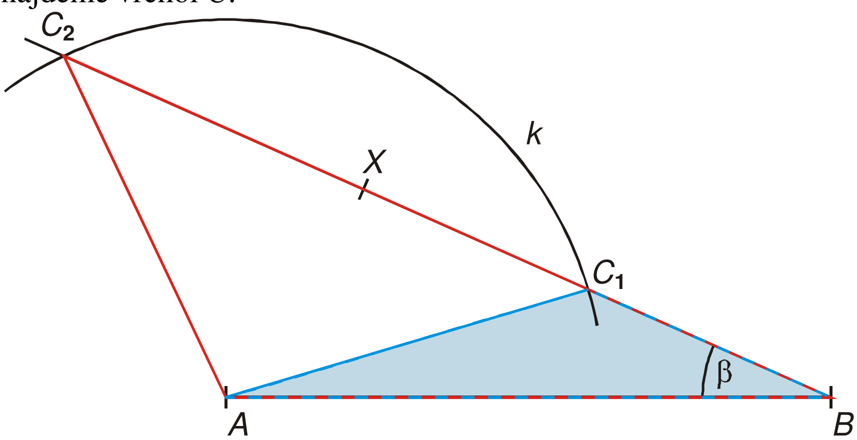
Př. 1: O jaký úhel se otočí hodinová ručička za:
a) 12 hodin b) 3 hodiny c) 1 hodinu d) 8 hodin?

a) 12 hodin
Hodinová ručička oběhne za 12 hodin celou jednu otáčku $\Rightarrow$ otočí se o $360°$.
b) 3 hodiny
Hodinová ručička oběhne za 3 hodiny čtvrtinu otáčky $\Rightarrow$ otočí se o $360°:4=90°$.
c) 1 hodinu
Hodinová ručička oběhne třetinu toho, co oběhne za 3 hodiny $\Rightarrow$ otočí se o $90°:3=30°$.
d) 8 hodin
Hodinová ručička oběhne osminásobek toho, co oběhne za 1 hodinu $\Rightarrow$ otočí se o $8\cdot 30°=240°$.

Př. 2: Narýsuj trojúhelník *ABC*, pro který platí $c=8\,\text{cm}$, $\beta=24°$, $b=5\,\text{cm}$. Začni náčrtkem. U narýsovaného trojúhelníku zkontroluj měřením, zda odpovídá zadání. Změř zbývající úhly trojúhelníku. Zkontroluj správnost naměřených úhlů. Hledej všechna řešení.



Nejdříve narýsujeme stranu *c*, pak úhel β a pomocí kružnice se středem ve vrcholu *A* najdeme vrchol *C*.



Postup konstrukce:
1. $AB, |AB| = 8\,\text{cm}$
2. polopřímka *BX*, $|\sphericalangle ABX| = \beta = 24°$
3. kružnice $k(A, 5\,\text{cm})$
4. body C_1, C_2 průsečíky *k* s polopřímkou *BX*
5. trojúhelníky ABC_1, ABC_2

Oba trojúhelníky odpovídají zadání.
Velikosti úhlů:

- trojúhelník ABC_1: $\alpha = 17°$, $\beta = 24°$, $\gamma = 139°$, $17° + 24° + 139° = 180°$ $\Rightarrow$ OK.
- trojúhelník ABC_2: $\alpha = 115°$, $\beta = 24°$, $\gamma = 41°$, $115° + 24° + 41° = 180°$ $\Rightarrow$ OK.

Pedagogická poznámka: U slabších žáků je třeba dát pozor, zda si správně vytáhnou trojúhelníky.

Pedagogická poznámka: Když jsem příklad poprvé zkoušel v hodině, neobsahoval poslední větu. Při tomto pokusu se nikomu nepodařilo najít oba trojúhelníky (v naprosté většině případů kvůli příliš krátkému oblouku *k*), přesto mně někteří z jindy nejúspěšnějších žáků vyčítali, že nevěděli, že mají hledat všechna řešení. Jsem proto zvědavý, jak se úspěšnost změní a zda příklad neztratí na významu tím, že už v zadání bude upozornění na něco nestandardního.

Př. 3: Za jak dlouho se minutová ručička otočí o:
a) 180° b) 30° c) 45° d) 12°

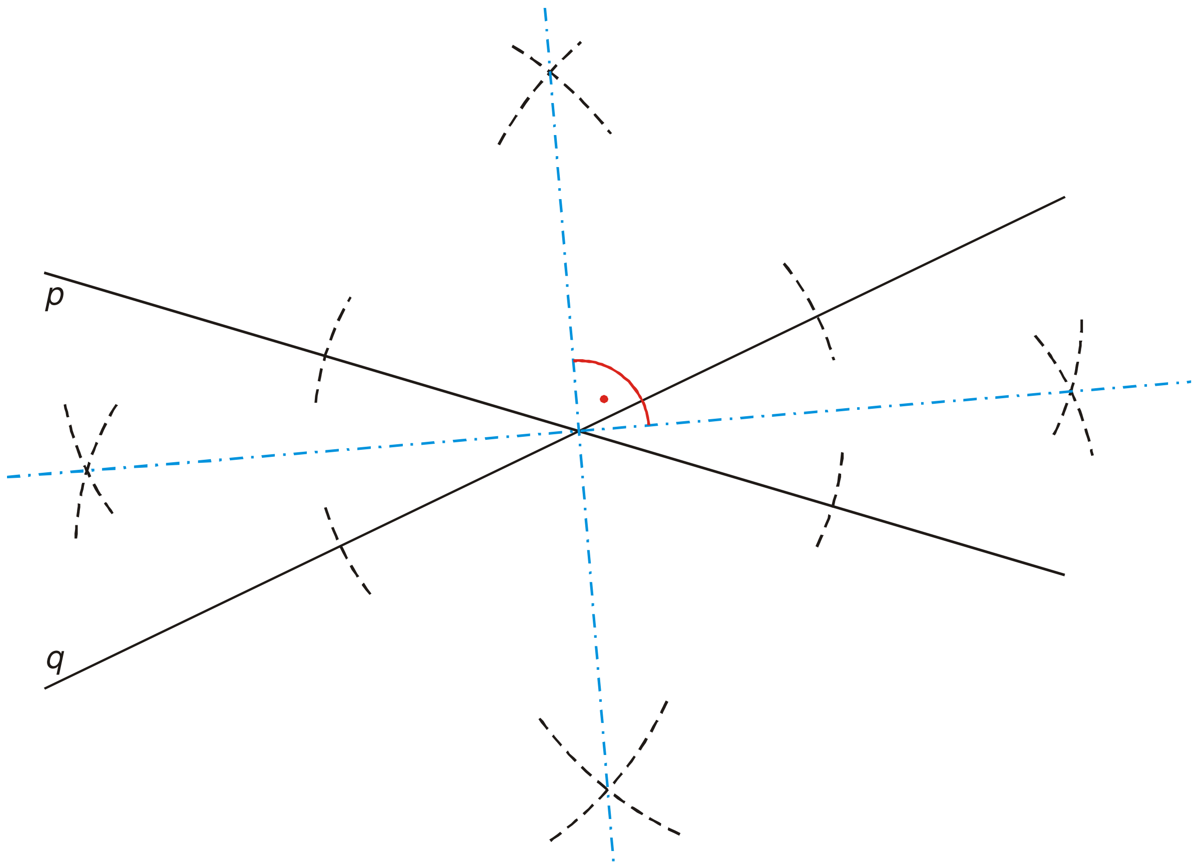
Minutová ručička oběhne kolem dokola (o $360°$) za 1 hodinu (60 minut).
a) 180°
$180°$ je polovina celé otáčky $\Rightarrow$ minutová ručička se otočí o $180°$ za 30 minut.

b) 30°
$30°$ je šestina ze $180°$ $\Rightarrow$ minutová ručička se otočí o $30°$ za $30:6=5$ minut (za 1 minutu se ručička otočí o $30°:5=6°$).

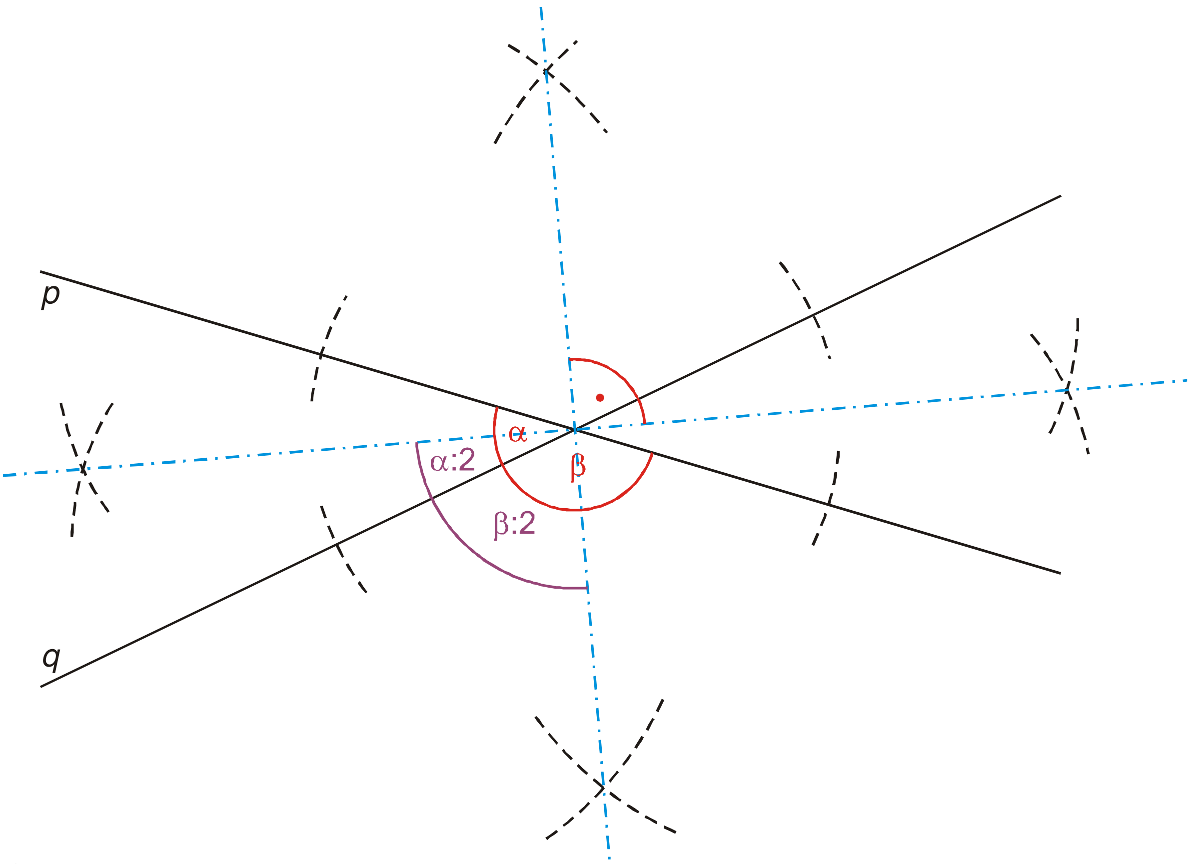
c) 45°
$45° = 30° + 15°$ $\Rightarrow$ minutová ručička se otočí o $45°$ za $5+2,5=7,5$ minuty.

d) 12°
$12° = 6° \cdot 2$ $\Rightarrow$ minutová ručička se otočí o $12°$ za 2 minuty.

Př. 4: Narýsuj dvě protínající se různoběžné přímky *p*, *q*. Označ dvojice vrcholových úhlů. Sestroj osy všech vzniklých úhlů. Co je na výsledku zajímavé? Pokus se najít vysvětlení.

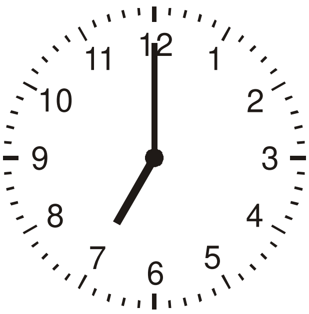


Získané osy jsou na sebe kolmé. Důvod je zřejmý z následujícího obrázku.

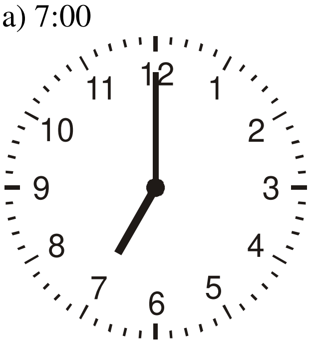


Úhel, který svírají obě osy získáme jako součet úhlů $\alpha:2$ a $\beta:2$. Protože α a β jsou úhly vedlejší, musí platit $\alpha+\beta=180°$ a tedy i $\alpha:2+\beta:2=180°:2=90°$.

Př. 5: Urči konvexní úhel, který svírá velká a malá ručička hodin v:
a) 7:00, b) 10:00, c) $4:30$, d) $10:15$?

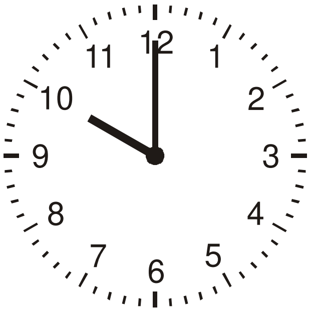


Dvanáct hodin dělí jednu otáčku na dvanáct částí, každé odpovídá otočení o úhel $30°$.
a) 7:00



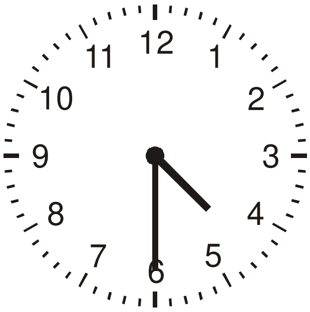
Ručičky svírají úhel, který odpovídá pěti částem otáčky $\Rightarrow$ svírají úhel $5\cdot 30°=150°$.

b) 10:00



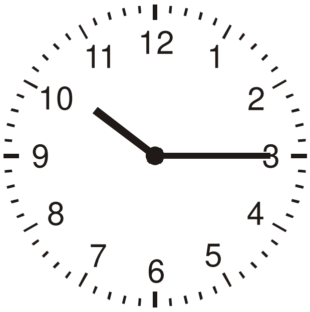
Ručičky svírají úhel, který odpovídá dvěma částem otáčky $\Rightarrow$ svírají úhel $2 \cdot 30° = 60°$.

c) $4:30$



Ručičky svírají úhel, který odpovídá jedné a půl části otáčky $\Rightarrow$ svírají úhel $30° + 30° : 2 = 45°$.

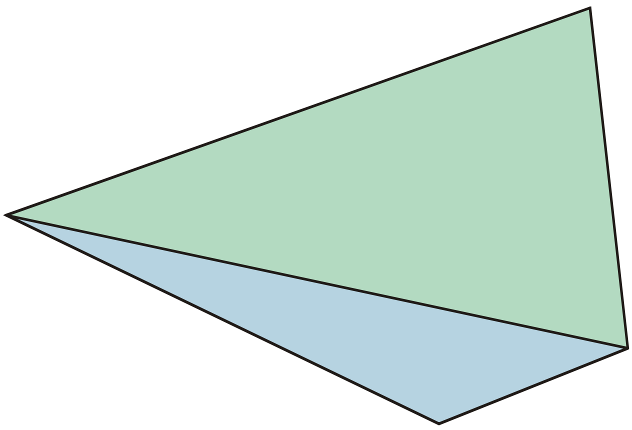
d) $10:15$



Ručičky svírají úhel, který odpovídá čtyřem celým a třem čtvrtinám části otáčky (malá ručička už od celé hodiny urazila čtvrtinu části) $\Rightarrow$ svírají úhel $4 \cdot 30° = 120°$ a $30° : 4 \cdot 3 = 22{,}5°$ $\Rightarrow$ dohromady $142{,}5°$.

Př. 6: Jaké pravidlo platí pro součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku? Dokaž ho.

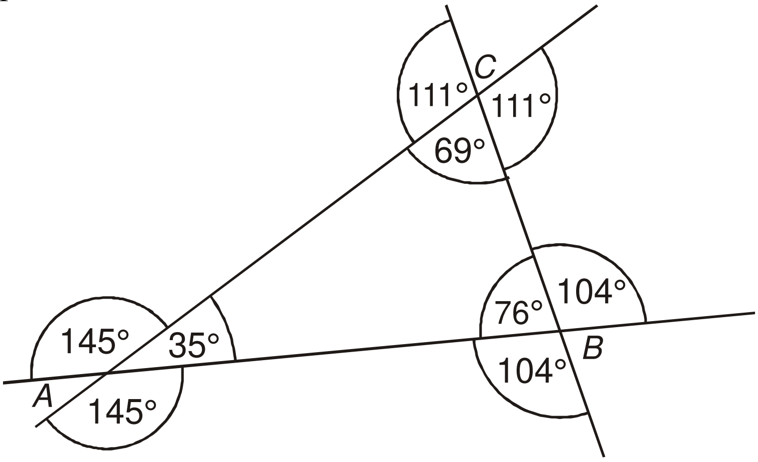
Součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku je roven $360°$.
Čtverec i obdélník mají čtyři pravé vnitřní úhly $\Rightarrow$ zdá se, že součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka by mohl být $4 \cdot 90° = 360°$.
Důkaz:



Úhlopříčka rozdělí čtyřúhelník na dva trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly dohromady skládají vnitřní úhly čtyřúhelníku. Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je tedy roven dvojnásobku součtu vnitřních úhlů trojúhelníku $2\cdot 180° = 360°$.

Př. 7: Existuje také pravidlo pro součet vnějších úhlů trojúhelníka?

Vnější úhly trojúhelníku jsou určeny vnitřními úhly (jsou vždy zbytkem do $180°$) $\Rightarrow$ zřejmě existuje pravidlo pro jejich součet.
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma = 540° - \alpha - \beta - \gamma = 540° - 180° = 360°$
Součet vnějších úhlů v trojúhelníku je $360°$, což můžeme ověřit na libovolném trojúhelníku z příkladu 4.



$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 145° + 104° + 111° = 360°$
Pravidlo platí.

Shrnutí: